MISSION ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES 67

Semaine des mathématiques 2019-2020

Mettons en scène les mathématiques

Cycle 3

Principe

Un défi est proposé chaque jour, il a été décliné en deux niveaux de difficulté. Ce choix dépend plus du contexte que du niveau de classe, mais certains défis de niveau 2 nécessitent des compétences de CM2. L'idée n'est pas ici d'enseigner une procédure efficace voire experte mais de permettre à chaque élève de développer une solution personnelle s'appuyant sur des procédures mathématiques enseignées au cycle 3.

Découvrir des ressources et mobiliser des compétences au cœur des mathématiques

La Mission Mathématique a souhaité faire découvrir, à travers ces 4 défis, des compétitions qui offrent des problèmes de qualité, accessibles dans les archives de chacune d'elles :

- Mathématiques sans frontière junior http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/MSF_junior/Epreuves.htm ;
- Rallye IREM Paris nord http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?rubrique32 ;
- Rallye Mathématiques transalpin http://www.rmt-sr.ch/archives.html ;
- Championnat de la Fédération Française des Jeux Mathématiques https://www.ffjm.org/index.php?option=com_content&task=view&id=46&Itemid=28 .

Ces ressources sont des moyens pertinents et calibrés de mobiliser les 6 compétences spécifiques aux mathématiques mises en relief dans les nouveaux programmes 2016 : calculer, modéliser, représenter, chercher, raisonner, communiquer.

Résolution de problèmes dit de recherche, de transfert ou atypiques :

Difficultés rencontrées et pistes pour remédier

→ **Se représenter la situation** : donner du sens à la situation, comprendre « l'histoire racontée par l'énoncé ».
- ⇨ Reformuler, théâtraliser, utiliser des documents permettant de comprendre le contexte.
- ⇨ Demander aux élèves de poser des questions, les noter au fur et à mesure. Faire une pause méthodologique : demander aux élèves s'ils peuvent répondre et comment ils obtiennent leur réponse sans donner aucune indication ;
- ⇨ Possibilité de préparer un QCM auquel les élèves doivent répondre.

→ **Se représenter le problème et le modéliser** : convoquer les bons outils mathématiques, les rendre opérationnels dans la situation pour développer une procédure efficace.
- ⇨ Attention aux aides classiques parfois contreproductives : comprendre le schéma du maitre et le lien avec la situation est souvent une tâche surajoutée !
- ⇨ A cette étape deux outils essentiels : l'écrit personnel de recherche et dans certains cas la manipulation. Point de vigilance : La manipulation relève de la représentation de la situation ; elle ne doit pas constituer une procédure de résolution, mais elle peut être gardée (ou reprise) pour confirmer la solution trouvée dans le champ mathématique.
- ⇨ Mêmes procédés que pour se représenter la situation, avec des questionnaires plus orientés vers les outils mathématiques.
- ⇨ Le fait d'expliciter les outils mathématiques mobilisables pour la résolution permet de relancer l'activité : les élèves qui ne les avaient pas mobilisés peuvent ensuite chercher à les rendre opérationnels en situation.

→ **Produire une solution sensée puis exacte** : mettre en œuvre une procédure et vérifier la validité de la réponse obtenue. Le cas échéant, accepter de modifier sa procédure si on constate que la première ne mène pas à un résultat cohérent. Le travail collaboratif (groupe après résolution individuelle) et le conflit sociocognitif (présentation de sa démarche à la classe) sont souvent efficaces.

→ **Communiquer**

⇨ Une des façons d'arriver à faire progresser les élèves est de leur demander de réécrire une solution après la mise en commun des résultats et des démarches.

Quelques pistes générales pour la mise en œuvre :

→ Un temps de recherche individuelle au début est à privilégier pour que les élèves s'approprient le problème, construisent des procédures personnelles pour les partager.

→ **Laisser les élèves chercher**. L'enseignant doit minimiser ses interventions dans la phase de recherche, garder une posture de questionnement : Es-tu sûr ? As-tu vérifié ? Favorisez des attitudes de questionnement et de retours au texte. L'équilibre est à trouver entre échanges de procédures, relance de l'activité (le niveau 1 est souvent une bonne activité de relance pour le niveau 2) et posture de spécialiste de la démarche plutôt que détenteur du résultat. Les élèves seront ainsi le plus souvent possible en situation de recherche pour parvenir à construire une solution personnelle.

➔ Se lancer, émettre puis tester une hypothèse, estimer une solution puis réajuster : cela s'apprend, notamment avec des techniques à développer, dont font partie la relecture, la vérification, l'utilisation de raisonnement sur des données ou une situation simplifiée.

→ **S'appuyer sur les productions d'élèves** pour, dans le cadre d'un débat argumenté (pauses méthodologiques et mises en commun), se représenter la situation, repérer des procédures et des démarches efficaces, même partiellement, de raisonnement et de justification. L'identification et le traitement des erreurs ne sont pas le but premier de ces défis. En revanche, ils sont d'excellents moyens de repérer les compétences à travailler en activités décrochées, en proposant par exemple de relire et corriger (ou non) des productions des élèves lors de cette situation.

Cette année, nous proposons aux élèves de libérer Bozo le clown qui a été enfermé dans une boîte cadenassée, par Merlin le magicien. Pour cela, après avoir résolu le défi et validé la réponse avec la classe, les élèves devront se rendre sur le site http://cpd67.site.ac-strasbourg.fr/maths*. En cliquant sur la caisse mystérieuse (à droite), ils pourront entrer leur réponse et ainsi obtenir le chiffre du jour qui compose le code du cadenas. En cas de mauvaise réponse, les élèves seront invités à reprendre leur recherche.*
En fin de semaine, ils pourront rentrer la combinaison du code pour ouvrir le cadenas.

Défi 1 : Géométrie – Costumes et accessoires

Sources :

Niveau 1 : Rallye 2002, IREM Paris-Nord, épreuve n°10 - Pliage. http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/IMG/pdf/rallye_2002_complet.pdf

Niveau 2 : FFJM : 25e championnat des Jeux mathématiques et logiques, Quarts de finale individuels, 2011
https://www.ffjm.org/upload/fichiers/QuartsdeFinale/Quartsdefinale2011.pdf

Références aux programmes et au socle commun de connaissances, compétences et culture :

Espace et géométrie :

- ✓ Reconnaitre et utiliser quelques relations géométriques :
- Symétrie axiale (concept sous-jacent, non nécessairement utilisé, mais explicite dans l'énoncé)
- Symétrie centrale (pour le niveau 2 seulement, et implicite)
- Repérage spatial : se repérer/se déplacer sur un quadrillage

***Compétences* :**

- ✓ **Chercher** : Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution du problème à partir de supports variés. S'engager dans une démarche, observer, émettre des hypothèses.
- ✓ **Représenter** : analyser une figure plane sous différents aspects (contour, lignes et points)
- ✓ **Raisonner** : Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples.
- ✓ **Communiquer** : Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Solutions et démarches :

Niveau 1

La propriété de symétrie de la figure obtenue est explicitée dans la consigne de construction.

Pour résoudre le problème, les élèves doivent :

- soit se représenter les figures obtenues à partir des différents modèles ;
- soit isoler une partie des figures complètes pour retrouver le modèle correspondant à chacune d'elles.

Solution

Motifs	①	②	③	④	⑤
Boucliers	**A**	**E**	**C**	**D**	**B**

Procédures possibles

- **Par observation et anticipation :**

Sans tracé

- observer et reconnaitre le modèle sur un quadrant du blason en discriminant la position des sommets et des segments les uns par rapport aux autres en s'aidant du quadrillage ;
- isoler le quadrant du napperon correspondant à la disposition des modèles (en variant les axes de pliage) et identifier le modèle correspondant.

Avec tracé

- compléter par symétrie une moitié du blason (en reproduisant les modèles sur papier quadrillé à main levée ou avec les instruments) ;
- tracer les blasons complets par symétrie sur les deux axes.

- **Par manipulation :**

- reproduire les modèles et construire les « napperons » en les découpant.

➔ Cette phase de manipulation serait plus pertinente dans la phase de validation, pour vérifier les réponses après un raisonnement mathématique.
On peut toutefois permettre cette procédure une fois pour un napperon, afin d'aider les élèves en difficulté à se représenter le problème, puis les inciter à *s'imaginer les autres pliages et découpages et/ou à dessiner ce que cela donne.*

<u>Difficultés attendues :</u>

→ Repérage sur un quadrillage pour une figure complexe pour l'analyse et/ou la reproduction des motifs.
→ Se représenter/tracer la figure symétrique des motifs dont les axes de symétrie ne sont pas alignés au quadrillage.
→ Dans la manipulation, évider les bonnes parties.

Niveau 2

Pour résoudre ce problème, les élèves doivent :
- représenter (mentalement ou en le dessinant) le blason après rotation d'un demi-tour du modèle ;
- comprendre que l'image du blason dans le miroir correspond à la figure symétrique du blason retourné suivant un axe vertical.
- appliquer cette symétrie axiale (là encore, mentalement ou en la dessinant)

<u>Solution</u>

Le dessin correspondant à ce que Mathias voit dans le miroir est le n°5.

5

<u>Procédures possibles</u>

- **Par observation et anticipation :**

Avec tracé :
- anticiper mentalement la position des triangles après rotation d'un demi-tour et tracer la figure correspondante. Puis tracer le symétrique correspondant à l'image dans le miroir.

Sans support écrit :
- anticiper la position du grand triangle du modèle en le faisant tourner d'un demi-tour :
sa pointe sera en haut à gauche,  et dans le miroir, elle sera en haut à droite. 

Puis raisonner en éliminant les dessins 2, 3, 4 et 6 qui ne respectent pas cette orientation.
Même raisonnement avec le triangle rectangle : le côté commun de l'angle droit et d'un des côtés du carré se trouve à gauche lors de la rotation  et dans le miroir, il sera à droite. 

En procédant par élimination, l'élève constate que le seul dessin respectant cette orientation du triangle rectangle est le n°5.
→ En raisonnant uniquement sur la position du triangle rectangle, on peut trouver directement la réponse.

- **Par manipulation :**

- découper le modèle (de l'énoncé ou sa reproduction), puis le tourner d'un demi-tour. Tracer le symétrique correspondant à l'image dans le miroir.
Mais si l'on autorise cette procédure, on n'aura pas fait de mathématiques dans cette étape ; il vaut mieux la garder pour vérifier la réponse.
On peut prévoir, pour des élèves en difficulté, une figure différente que l'on peut manipuler pour faire comprendre le demi-tour, en amont de l'exercice.

<u>Difficultés attendues :</u>

→ Comprendre et effectuer un demi-tour (ou une rotation de 180°).

→ Comprendre que l'image du blason dans le miroir correspond à la figure symétrique du blason retourné suivant un axe vertical.
→ Analyser les caractéristiques des éléments qui composent la figure.
→ Repérer la position des sommets et/ou des côtés des triangles à chaque étape.

Erreurs possibles en fonction des réponses :

Dessins	n°2	n°3	n°4	n°7
Rotation	$\frac{1}{4}$ de tour à gauche	$\frac{1}{4}$ de tour à gauche	$\frac{1}{2}$ tour	$\frac{1}{4}$ de tour à gauche
Symétrie	Oui	Oui, suivant un axe horizontal	Non	Non

Défi 2 : espace et calcul

Sources :
Rallye 2009, IREM Paris-Nord, épreuve n°10 - Sucrage http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/IMG/pdf/rallye_2009_complet.pdf
Mathématiques sans Frontières Junior, Académie de Strasbourg, Finale 2009, Épreuve 6 - Pharaon jaloux http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/MSF_junior/Epreuves/E_09_fin.pdf

Références aux programmes et au socle commun de connaissances, compétences et culture :

Espace et géométrie :
- ✓ Se représenter et comprendre une organisation de solides dans l'espace, dont certains ne sont pas visibles.

Nombres et calculs :
- ✓ Dénombrer des objets en configuration rectangulaire
- ✓ Reconnaître une représentation du produit de deux nombres : reconnaitre le lien entre multiplication et organisation rectangulaire.

Compétences :
- ✓ **Chercher** : Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution du problème à partir de supports variés. S'engager dans une démarche, observer, émettre des hypothèses.
- ✓ **Représenter** : analyser une figure en perspective sous différents aspects (contour, lignes et hauteur, parties cachées)
- ✓ **Raisonner** : Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples.
- ✓ **Calculer** : Utiliser les propriétés de la multiplication et additionner des nombres entiers
- ✓ **Communiquer** : Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Solutions et démarches :

Niveau 1

Pour résoudre ce problème, les élèves doivent se représenter la pyramide dans l'espace et dénombrer le nombre de pierres cubiques qui la composent.

Solution

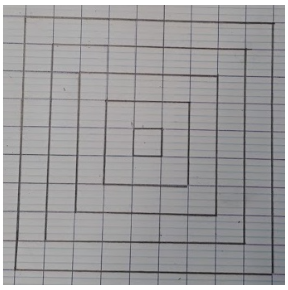
Toutencarton utilisera 84 pierres cubiques.

Procédures possibles
- Dénombrement de la quantité de cubes à chaque niveau.

Numéro du niveau (en partant du haut)	1	2	3	4

« Taille d'un côté » -Nombre de cubes par côté	1	3	5	7
Quantité de cubes sur le niveau	1	9 (= 3 × 3)	25 (= 5 × 5)	49 (= 7 × 7)
Quantité cumulée	1	+ 9 = 10	+ 25 = 35	+ 49 = 84

- Modélisation de la situation en représentant les niveaux vus du dessus.



→ L'usage de la calculatrice peut être autorisé soit en différenciation, soit pour la vérification du résultat.

Difficultés attendues

→ Prendre en compte les cubes non visibles.

→ S'organiser pour le calcul.

Niveau 2

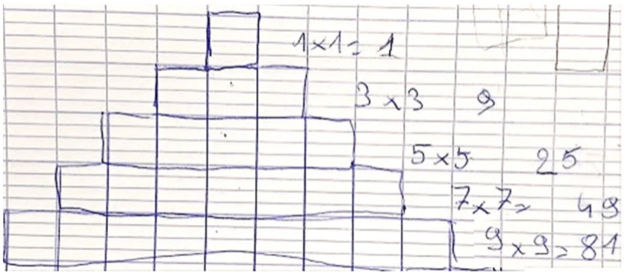
Pour résoudre ce problème, les élèves doivent se représenter la pyramide dans l'espace, anticiper la partie de la pyramide non représentée sur le dessin et dénombrer le nombre de pierres cubiques qui la composent.

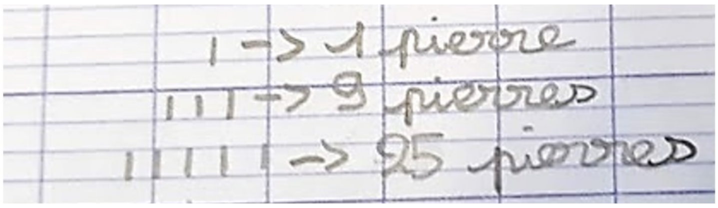
Solution

Il lui faudra 165 pierres cubiques pour construire une pyramide à 5 étages.

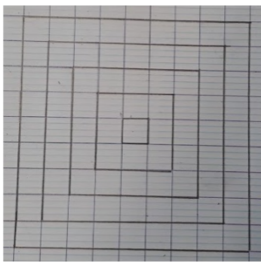
Procédures possibles

- Modélisation de la situation en représentant les niveaux vus de face en y associant le calcul pour déterminer le nombre de pierres par niveau.





- Modélisation de la situation en représentant les niveaux vus du dessus.



- Dénombrement de la quantité de cubes à chaque niveau.

Numéro de l'étage (en partant du haut)	1	2	3	4	5
« Taille d'un côté » -Nombre de cubes par côté	1	3	5	7	9

Quantité de cubes sur l'étage	1	9 (= 3 × 3)	25 (= 5 × 5)	49 (= 7 × 7)	81(= 9 × 9)
Quantité cumulée	1	+ 9 = 10	+ 25 = 35	+ 49 = 84	+ 81 = 165

➔ L'usage de la calculatrice peut être autorisé soit en différenciation, soit pour la vérification du résultat.

<u>Difficultés attendues</u>

→ Prendre en compte les cubes non visibles.

→ Comprendre comment se génère le niveau suivant (ex. ajouter seulement 1 cube au lieu de 2 au côté précédent).

→ S'organiser pour le calcul.

<u>Prolongement possible</u>

Extrait du manuel Kiwi 6^e^, Hachette éditions

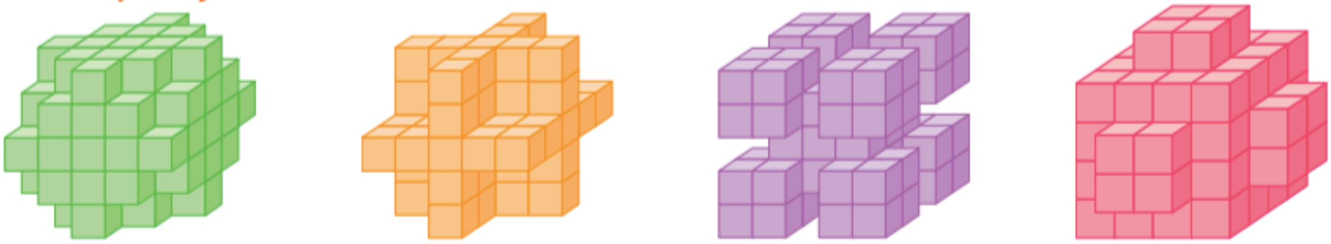
13 Histoires de cubes [Raisonner] [Calculer]

D'après le rallye mathématique, Irem Paris Nord.

a Les sculptures

Quelle que soit la façon de poser ces objets sur une table, on les voit toujours ainsi.

• ***Pour chaque objet, donner le nombre de cubes nécessaire à sa construction.***



Défi 3 : nombres et calculs

Sources :

Niveau 1 : 24^e^ Rallye Mathématique Transalpin, Académie de Lyon, Mars-Avril 2016, Épreuve 2 – Puce savante
http://www.rmt-sr.ch/rallye/ARCHIVES/RMT24-ana2.pdf
Niveau 2 : 18e Rallye Mathématique Transalpin, Académie de Lyon, Mars-Avril 2010, Épreuve 2 – La guirlande
http://www.rmt-sr.ch/rallye/ARCHIVES/RMT18-ana2.pdf

<u>Références aux programmes et au socle commun de connaissances, compétences et culture :</u>

Nombres et calculs :

- ✓ Calculer avec des nombres entiers : utiliser la division euclidienne, particulièrement comme résumé d'une « addition itérée à trou », ou d'une « soustraction itérée à trou »

- ✓ Utiliser des faits numériques.
- ✓ Résoudre des problèmes :
  - pour le niveau 1 : utilisation de la composition de deux transformations du champ additif (typologie de Vergnaud) ;
  - pour le niveau 2 : résolution d'un problème complexe du champ additif.

Compétences :

- ✓ **Chercher** : Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution du problème à partir de supports variés. S'engager dans une démarche, émettre des hypothèses. Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.
- ✓ **Modéliser** : Reconnaitre des problèmes relevant de situations additives.

- ✓ **Représenter** : utiliser des outils pour représenter un problème.
- ✓ **Raisonner** : Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples et la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.
- ✓ **Calculer** : Calculer sur des entiers.
- ✓ **Communiquer** : Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Solutions et démarches :

Niveau 1

Solution

Bozzo a placé 55 drapeaux blancs et 45 drapeaux gris.

Procédures possibles

- **Par la représentation de la guirlande complète :**

- représentation de la guirlande vierge puis coloriage dans un deuxième temps : la quantité de drapeaux étant atteinte, les élèves n'ont à se focaliser que sur la succession des drapeaux en respectant l'algorithme. Ils pourront ensuite dénombrer ou calculer les drapeaux de chaque couleur.

Par cette procédure, le problème se réduit à un problème de dénombrement. On pourra alors s'attacher à différentes procédures de dénombrement, en n'autorisant pas le comptage.

- représentation de la guirlande en indiquant la couleur des drapeaux au fur et à mesure. Cela nécessite de calculer régulièrement le nombre de drapeaux déjà représentés pour décider de poursuivre ou non, et de s'arrêter au 100ème drapeau.

- **Par le calcul :**

- utiliser des nombres pour représenter les drapeaux utilisés et calculer la quantité correspondante jusqu'à atteindre 100. En déduire ou dénombrer le nombre de drapeaux de chaque couleur.

2×1 2×2 2×3 2×4 2×5 2×6 2×7 2×8 2×9 1×10

2 4 6 8 10 12 14 16 18

10 10 30

10 30

10 + 10 + 10 + 30 + 30 = 90 10

On arrive à 90 drapeaux après la série des 9 drapeaux blancs puis gris. A ce stade, la guirlande est composée de 45 drapeaux de chaque couleur.

Pour compléter à 100 il manque 10 drapeaux. Ce seront les 10 drapeaux blancs de la suite.

Cet arbre peut se présenter sous forme de tableau.

Quantité de drapeaux blancs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantité de drapeaux gris	1	2	3	4	5	6	7	8	9	--
Ajout		+4	+6	+8	+10	+12	+14	+16	+18	+10
Quantité totale de drapeaux cumulée	2	6	12	20	30	42	56	72	90	100

Et donc, avant la dernière série de 10 drapeaux blancs, il y a 90 drapeaux répartis équitablement entre blancs et gris, soit 45 de chaque sorte, plus 10 blancs, ce qui donne bien 45 gris et 55 blancs.

- **Par manipulation :**

- manipulation directe d'objets de 2 couleurs en respectant l'algorithme de la guirlande puis dénombrement des objets par couleur.

→ Cette procédure est celle qui mobilise le moins de connaissances mathématiques et ne présente que peu d'intérêt en cycle 3. On privilégiera les autres procédures qui permettent un degré d'abstraction plus élevé et donc un transfert à des situations de plus en plus complexes.

Erreurs attendues

- partage des 100 drapeaux en 2 parties égales (50 drapeaux de chaque couleur) en ne prenant pas en compte ou en ayant une représentation erronée (car partielle) de l'algorithme qui permet d'obtenir la guirlande ;
- erreur de calcul ou d'énumération.

Niveau 2

Solution

La puce dépassera la case 100 au 47ème saut.

Procédures possibles

- **Par le calcul , en raisonnant sur une partie de la bande numérique :**

- identification de la succession des cases occupées :

$$\underbrace{0 \xrightarrow{+9} 9 \xrightarrow{-5} \mathbf{4}}_{\text{2 sauts}}\ \underbrace{\xrightarrow{+9} 13 \xrightarrow{-5} \mathbf{8}}_{\text{2 sauts}}\ \underbrace{\xrightarrow{+9} 17 \xrightarrow{-5} \mathbf{12}}_{\text{2 sauts}}$$

En partant de 0, après les 2 sauts successifs, on arrive sur un multiple de 4 car avancer de 9 cases et reculer de 5 cases revient à progresser de 4 cases sur la bande.

Cases d'arrivée après les 2 sauts / multiples de 4	Nombre de sauts
4	1 × 2 = 2
8	2 × 2 = 4
12	3 × 2 = 6
20	5 × 2 = 10
80	20 × 2 = 40
100	25 × 2 = 50

Résultats obtenus en raisonnant sur le début de la bande.

Anticipation sur la suite de la bande.

Or avant d'arriver exactement sur la case 100, la puce l'aura dépassée. Elle a donc fait moins de 50 sauts.

⇨ ***Approches successives en partant d'un multiple proche de 100, en avançant*** :

$$\underbrace{80 \xrightarrow{+9} 89 \xrightarrow{-5} 84}_{\text{2 sauts}}\ \underbrace{\xrightarrow{+9} 93 \xrightarrow{-5} 88}_{\text{2 sauts}}\ \underbrace{\xrightarrow{+9} 97 \xrightarrow{-5} 92}_{\text{2 sauts}}\ \underbrace{\xrightarrow{+9} 101}_{\text{1 saut}}$$

Pour arriver sur la case 80, la puce fait 40 sauts. De la case 80 à la case 101, la puce fait 7 sauts. Elle fera donc 47 sauts pour dépasser la case 100.

⇨ ***En partant de 100, recherche des étapes précédentes en allant à rebours*** :

$$92 \xleftarrow{-9} \underbrace{101 \xleftarrow{+5}}_{\text{1 saut}}\ \underbrace{96 \xleftarrow{-9} 105 \xleftarrow{+5}}_{\text{2 sauts}}\ 100$$

Pour arriver sur la case 100, la puce fait 50 sauts. Cette case sera dépassée 3 sauts avant. Elle fera donc 47 sauts pour dépasser la case 100.

- **Par manipulation, avec une bande numérique :**

- utilisation d'une bande numérique allant au moins jusqu'à 100 et réalisation des déplacements. Cela nécessite de comptabiliser le nombre de sauts effectués. → En utilisant cette procédure, les élèves ne mobilisent que peu de notions mathématiques. Elle peut être utilisée pour la validation.

Difficultés attendues

- Organisation de la résolution pour identifier les cases atteintes et le nombre de sauts leur correspondant.
- Raisonnement sur le nombre de sauts pour arriver sur la case 100, sans anticiper qu'elle sera dépassée avant.
- Erreurs possibles en calculs :
    - Résultats
    - Choix des opérations en fonction de la chronologie choisie (+9 -5 en avançant mais -9+5 en allant à rebours).

Défi 4 : calculs et logique

Sources :

Niveau 1 : Mathématiques sans Frontières Junior, Académie de Strasbourg, Découverte 2012, Épreuve 1 – Leckerbissen/Sweets http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/MSF_junior/Epreuves/MSFJU_12_EpDec.pdf

Niveau 2 : Rallye 2016, IREM Paris-Nord, épreuve n°4 - le mobile

http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/IMG/pdf/rallye2016_gazettes.pdf

Références aux programmes et au socle commun de connaissances, compétences et culture :

Nombres et calculs : Calculer avec des nombres entiers. Calculer mentalement.

Compétences :

- ✓ **Chercher** : Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes (à partir de dessins représentant des situations d'équilibre sur des balances de Roberval, à partir d'un dessin représentant un mobile).
- ✓ **Modéliser** : modéliser un équilibre de masses par une égalité.
- ✓ **Raisonner** : Résoudre un problème nécessitant l'organisation de données multiples et la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.
- ✓ **Calculer** : Calculer sur des entiers. Contrôler la vraisemblance des résultats.
- ✓ **Communiquer** : Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Solutions et démarches :

Contexte de grandeur : Les défis proposés utilisent la notion de masse et le principe de la balance de Roberval.
Deux objets ont même masse si, mis chacun sur un des plateaux, ils font équilibre. Un objet C a pour masse la somme des masses des objets A et B si, mis dans un des plateaux de la balance, il fait équilibre avec les objets A et B mis ensemble dans l'autre plateau. *a* objets équivalents ont pour masse globale *a* fois la masse de l'objet pris isolément. (On n'utilise pas ici la relation d'ordre, les balances sont à l'équilibre).

- ➢ Le niveau 1 donne deux situations d'équilibre avec une balance et trois types d'objets. Il faut déterminer combien il faut ajouter d'objets d'un même type sur un plateau pour avoir l'équilibre dans une troisième situation. Dans cet exercice, il ne s'agit pas de trouver la masse de chacun des trois types d'objets, mais de déterminer des correspondances entre les masses de ces objets.
- ➢ Le niveau 2 étend le problème à une autre situation et s'inspire des *mobiles de Calder*. Il s'agit, à partir d'une situation d'équilibre d'un mobile et connaissant la masse d'un type d'objets, de déterminer les masses de chacun des autres types.

Niveau 1

Solution

Le magicien doit faire apparaître 3 sucettes sur le plateau de droite.

Procédures possibles

Les méthodes de résolution utilisent donc le principe de la balance de Roberval. De nombreux raisonnements sont possibles, mais les difficultés sont nombreuses. Nous proposons 2 méthodes (non exhaustives).

Notations :

Équilibre	Bonbon	Sucette	Tablette de chocolat
↑	b	s	t

Méthode 1 :

La 1ère balance nous indique que :

1t + 2s ↑ 8b*

La deuxième balance nous indique que :

1t ↑ 2b + 1s   Si on ajoute 2s à gauche et à droite, on obtient 1t + 2s ↑ 2b + 3s

On constate que pour les deux balances, les plateaux de gauche sont identiques. Donc les masses des plateaux de droite sont égales, d'où :

8b ↑ 2b + 3s   On peut enlever à gauche et à droite 2b. On obtient :

6b ↑ 3s   6 bonbons pèsent autant que 3 sucettes.

Donc, 2 bonbons pèsent autant que 1 sucette : **2b ↑ 1s C'est un premier résultat important**.

On peut reprendre l'équilibre * et remplacer les 2s à gauche par 4b et on obtient : 1t + 4b ↑ 8b.

➔ 2 raisonnements possibles alors :

a. En enlevant 2b sur les deux plateaux, on obtient : 1t + 2b ↑ 6b.
   Et comme 6b pèsent autant que 3s (6b ↑ 3s), la troisième balance équilibrée sera donc : **1t + 2b↑3s**

b. 1t + 4b ↑ 8b donc 1t↑4b. Or, 2b↑1s donc 1t↑2s.
   Dans la 3ème balance, on peut remplacer la tablette par 2 sucettes, et les 2 bonbons par 1 sucette. On obtient alors : **1t + 2b↑3s**

Méthode 2 :

La 2ème balance nous indique que :

1t ↑ 2b + 1s **

Nous pouvons donc remplacer 1t par 2b + 1s dans l'équilibre de la première balance :

2b + 1s + 2s ↑ 8b   ce qui nous fait   2b + 3s ↑ 8b   et en enlevant 2b sur les 2 plateaux :

3s ↑ 6b et on obtient de nouveau **2b ↑ 1s**   **un premier résultat important**

On peut néanmoins terminer d'une manière différente d'avant, en reprenant l'équilibre **

1t ↑ 2b + 1s comme 2b valent 1s on peut les remplacer dans le plateau de droite et avoir ainsi :

1t ↑ 2s   Puis en ajoutant 2b à gauche et à droite on a :

1t +2b ↑ 2b + 2s   Mais comme 2b valent 1s, on a finalement :

1t + 2b↑3s

Difficultés attendues

De nombreux raisonnements sont possibles, nous venons de le voir, mais les difficultés sont nombreuses.

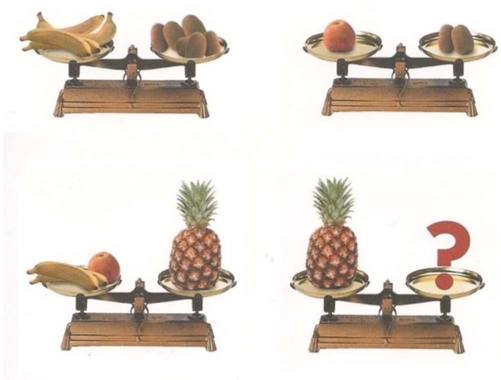
- Les élèves ont moins souvent accès à une balance de Roberval en classe et les raisonnements reposant sur des manipulations qu'on imagine mentalement sont, actuellement pour eux, sans doute plus difficiles à concevoir.
- Les raisonnements sont plus difficiles à concevoir d'autant qu'ils sont variés. On ajoute ou retranche la même masse sur les deux plateaux ; à une masse, on substitue une masse équivalente ; si je divise la masse d'un plateau par a, je divise la masse de l'autre plateau par a.

Des erreurs sont donc possibles lors de ces différentes opérations mentales.

Des erreurs peuvent aussi survenir car des élèves ont une conception erronée de la notion de masse et/ou du fonctionnement d'une balance à deux plateaux et de son principe de fonctionnement. La grandeur « masse » doit se construire au cycle 2, avec, précisément, des situations d'équilibre à l'aide d'une Roberval. Ce n'est pas une grandeur « innée ».

Si l'enseignant en a l'opportunité, on peut conseiller de proposer des manipulations aux élèves.

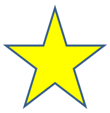
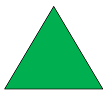
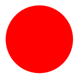
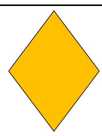
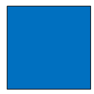
On peut également proposer des problèmes avec des raisonnements moins complexes, par exemple :



Combien doit-on mettre de kiwis sur le plateau de la balance pour faire l'équilibre avec l'ananas ?
(source : http://www.clgpicasso.fr/enigme-de-la-semaine-du-15-fev-au-19-fev-2016/)

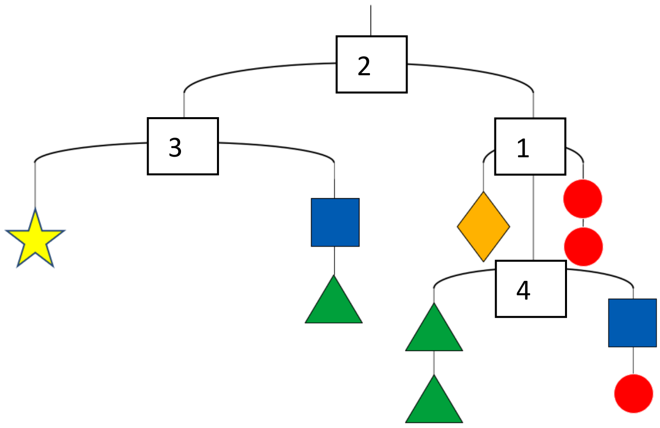
Niveau 2

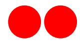
Solution

				
8g	3g	1 g	2g	5g

Procédures possibles

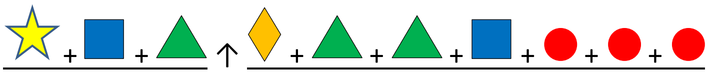
Un seul enchaînement de raisonnements permet de répondre au problème (et cela constitue une difficulté).
Afin de mieux comprendre cet enchaînement, nous allons numéroter les différents équilibres sur le schéma :

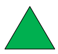


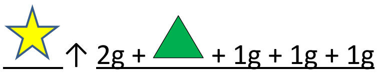
- Étape 1 : L'équilibre n°1 nous permet de trouver immédiatement la masse d'un  qui est équivalente à , donc :

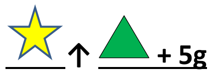
  Un  **a une masse de 2g**. On peut dire aussi qu'il « pèse 2 g »

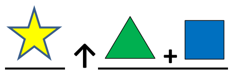
- Etape 2 : L'équilibre n°2 permet d'écrire la correspondance suivante :

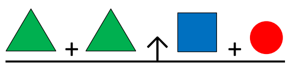
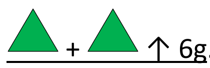
  On peut supprimer à gauche et à droite un  et un . On remplace les objets (connus) par leur masse.

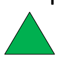
  

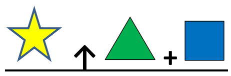
  d'où, 

- Etape 3 : L'équilibre n°3 nous indique que . Avec ce qui précède, on en déduit :

  Un  **a une masse de 5g.**

- Etape 4 : L'équilibre n°4 nous indique que  donc que 
  .

  On en déduit que **la masse de**  **est 3g**.

- Etape 5 : On revient à l'équilibre n°3  et on obtient **la masse de**  **8g** (3g + 5g).

  Remarque : pour cette dernière étape, on pouvait aussi reprendre le résultat obtenu à l'étape 2.

Difficultés attendues

Les élèves doivent observer le mobile et sa construction. Il faut percevoir les différents équilibres et les relations qui les lient. Il faut supposer (et l'illustration devrait le permettre) que pour chaque équilibre l'axe est au milieu de la « baguette » ; c'est-à-dire que les masses sont égales à gauche et à droite dans chaque situation.
Une (ou plusieurs) omission(s) ou une mauvaise compréhension des différents équilibres et des liens entre les objets suspendus peut engendrer des erreurs ou empêcher les élèves d'aboutir.

Il faut très vite considérer l'axe principal (noté 2 sur le schéma). Cela peut être déroutant pour les élèves, car c'est l'équilibre qui fait intervenir tous les types de pièces. Cela va sans doute contre l'intuition ; on serait sans doute plus tenté de considérer des équilibres faisant intervenir moins de types de pièces.

Prolongement possible

Ce peut être l'occasion d'une activité transversale de construction d'un véritable mobile. La nécessité des équilibres deviendra alors une réalité fructueuse.
On peut imaginer proposer d'autres exercices de ce type (niveau 1 ou niveau 2).

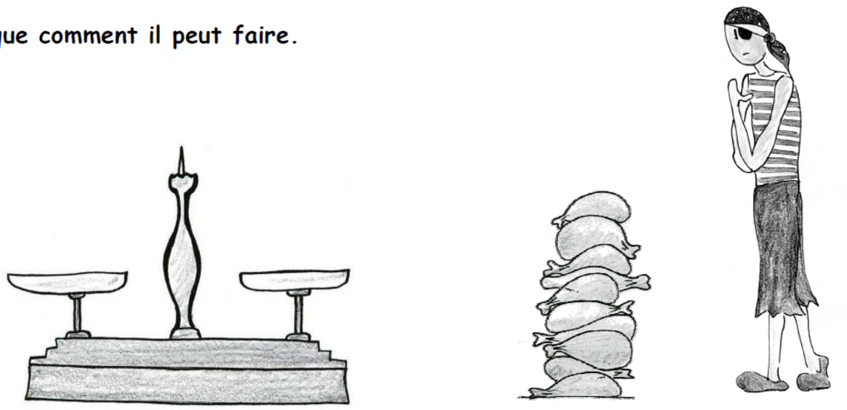
On peut également enrichir l'utilisation des balances de Roberval dans des situations ou on va utiliser des déséquilibres :

- ranger des objets par ordre de masse à partir de quelques comparaisons.
- Résoudre des énigmes du type « Les sacs d'or » (Mathématiques sans frontières : épreuve n°3, sujet de découverte 2010)

Epreuve 3 : Les sacs d'or

Un pirate a dix sacs contenant tous le même nombre de pièces d'or. Malheureusement, un sac est rempli de fausses pièces. Elles sont plus légères que les vraies pièces.
Le pirate a une balance à deux plateaux.
Il sait qu'en trois pesées au maximum, il est sûr de trouver le sac de fausses pièces.

Explique comment il peut faire.



http://maths-msf.site.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article357